

Temat 7. Transformacja stanu polaryzacji światła przez płytki płasko-równoległe

7.1. Wektor Jonesa

Jeżeli wybrano oś $z||s$, wektor $\mathbf{\epsilon}$ w ośrodku izotropowym może mieć tylko składowe \mathcal{E}_x i \mathcal{E}_y

$$\mathcal{E}_x = |\mathcal{E}_{0x}| \exp[i(\omega t - nz/c - \delta_x)], \quad (5.32)$$

$$\mathcal{E}_y = |\mathcal{E}_{0y}| \exp[i(\omega t - nz/c - \delta_y)]. \quad (5.33)$$

Zapisując składowe \mathcal{E}_x i \mathcal{E}_y w postaci macierzy kolumnowej otrzymujemy **wektor Jonesa**

$$\mathbf{\epsilon} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{bmatrix} = e^{i(\omega t - nz/c)} \begin{bmatrix} m_x e^{-i\delta_x} \\ m_y e^{-i\delta_y} \end{bmatrix}, \quad (7.1)$$

Jeżeli nie są ważne zmiany chwilowego położenia wektora $\mathbf{\epsilon}$ w czasie, a jedynie stan polaryzacji i natężenie fali, odrzuca się wyraz $e^{i(\omega t - nz/c)}$. Ponadto, gdy istotna jest tylko różnica faz, a nie ich bezwzględne wartości δ_x i δ_y , wektor (7.1) upraszcza się do postaci

$$\mathbf{\epsilon} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y e^{i\delta} \end{bmatrix} \quad \text{albo} \quad \begin{bmatrix} m_x e^{-i\delta} \\ m_y \end{bmatrix}, \quad (7.2)$$

gdzie $\delta = \delta_x - \delta_y$.

c.d. Wektor Jonesa

Powierzchniowa gęstość strumienia energii przenoszona przez falę elektromagnetyczną jest opisana przez wektorem Poyntinga \mathbf{S} [W/m²]

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{H}. \quad (7.3)$$

W ośrodku izotropowym, gdzie ε i μ są wielkościami skalarnymi, kierunek transportu energii $\mathbf{S} \parallel \mathbf{s}$ (\mathbf{s} - kierunek prostopadły do czoła fali). Zapisując wektor \mathbf{H} poprzez wektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ na podstawie równań Maxwella (5.1a)-(5.1f) i równania fali płaskiej (5.16) otrzymujemy

$$\mathbf{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \mathcal{E}^2 \mathbf{s}. \quad (7.4)$$

Natężenie pola elektrycznego \mathcal{E} jest zmienne w czasie i tylko część rzeczywista reprezentuje energię fali. Średnia czasowa modułu wektora Poyntinga (7.4) wynosi

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} |\mathcal{E}|^2. \quad (7.5)$$

W literaturze szeroko wykorzystuje się jako „natężenie światła” wielkość

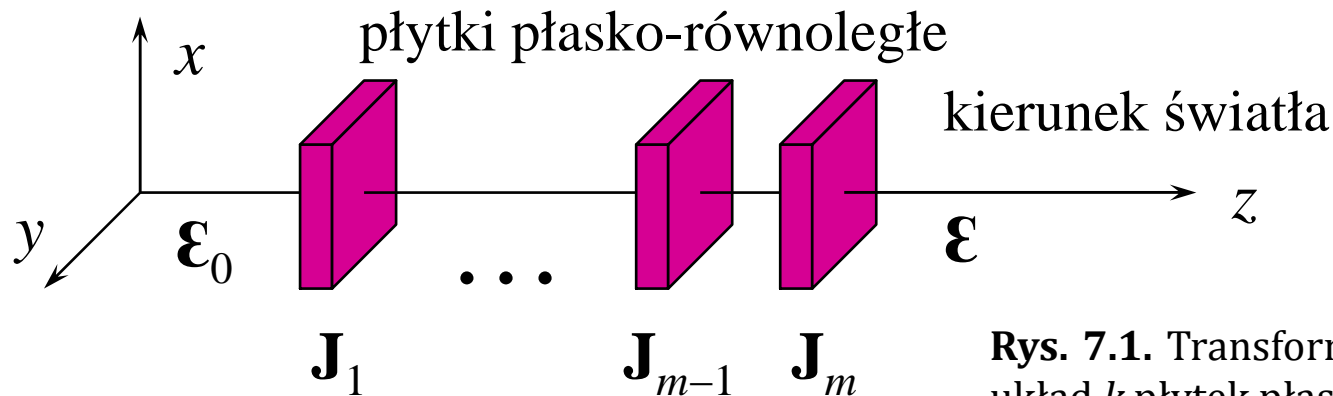
$$I [\text{m}^2/\text{V}^2] = \frac{\langle S \rangle}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}} = |\mathcal{E}|^2, \quad (7.6)$$

tak więc natężenie światła oblicza się na podstawie wektora Jonesa $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y]$ jako

$$I = |\varepsilon_x|^2 + |\varepsilon_y|^2. \quad (7.7)$$

7.2. Rachunek macierzowy Jonesa

Macierz Jonesa o wymiarach 2×2 reprezentuje transformację stanu fali przechodzącej przez płytkę płasko-równoległą. W przypadku układu k płytek w ośrodku izotropowym:



Rys. 7.1. Transformacja stanu fali przez układ k płytek płasko-równoległych.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{J}_m \mathbf{J}_{m-1} \cdots \mathbf{J}_1 \boldsymbol{\epsilon}_0 \quad (7.8)$$

gdzie:

$\boldsymbol{\epsilon}_0 = [\epsilon_{0x}, \epsilon_{0y}]$ – wektor Jonesa fali padającej,

$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y]$ – wektor Jonesa fali wychodzącej z układu,

$\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_m$ – macierze Jonesa opisujące kolejne płytki.

c.d. Rachunek macierzowy Jonesa

Najogólniejszą postać macierzy Jonesa, która obejmuje także dichroiczne ośrodki eliptycznie dwójłomne, podali Ścierski i Ratajczyk [6]:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} T_f \cos^2 \beta_f + T_s \sin^2 \beta_f e^{-i\Gamma} & \sin \beta_f \cos \beta_f (T_f - T_s e^{-i\Gamma}) e^{-i\delta} \\ \sin \beta_f \cos \beta_f (T_f - T_s e^{-i\Gamma}) e^{i\delta} & T_f \sin^2 \beta_f + T_s \cos^2 \beta_f e^{-i\Gamma} \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

gdzie:

T_f i T_s – amplitudowe współczynniki transmisji fali szybszej (f) i wolniejszej (s),

β_f – kąt przekątnej dotyczący fali szybszej (rys. 5.2), wzory (5.40) i (5.41),

δ – różnica fazy składowej x względem składowej y dla fali szybszej (5.42),

Γ – różnica faz powstająca w płytce pomiędzy falą wolniejszą i szybszą

$$\Gamma = \frac{2\pi L}{\lambda} (n_s - n_f), \quad (7.10)$$

L – droga światła w płytce,

λ – długość fali,

n_f i n_s – współczynniki załamania światła dla fali szybszej (5.30) i wolniejszej (5.31).

W przypadku ośrodków liniowych, gdzie $\delta = 0^\circ$ albo 180° , azymut fali szybszej

$$\alpha_f = \beta_f e^{i\delta} = \begin{cases} \beta_f, & \text{dla } \delta = 0^\circ, \\ -\beta_f, & \text{dla } \delta = 180^\circ \end{cases} \quad (7.11)$$

gdzie azymut 0° jest zdefiniowany przez oś $+x$.

c.d. Rachunek macierzowy Jonesa

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} T_f \cos^2 \beta_f + T_s \sin^2 \beta_f e^{-i\Gamma} & \sin \beta_f \cos \beta_f (T_f - T_s e^{-i\Gamma}) e^{-i\delta} \\ \sin \beta_f \cos \beta_f (T_f - T_s e^{-i\Gamma}) e^{i\delta} & T_f \sin^2 \beta_f + T_s \cos^2 \beta_f e^{-i\Gamma} \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

Macierz (7.9) jest wyprowadzona w sposób dokładny dla wszystkich ośrodków opisanych hermitowskimi tensorami przenikalności $[\boldsymbol{\epsilon}]$ i nieprzenikalności $[\mathbf{B}]$, skąd wynika:

- taki sam kształt elips stanu polaryzacji fali szybszej oraz wolniejszej,
- osie wielkie tych dwóch elips tworzą zawsze kąt 90° .

Dlatego zapis macierzy nie wymaga wielkości analogicznych do β_f i δ , lecz odnoszących się do fali wolniejszej.

Macierz (7.9) można stosować z bardzo dobrym przybliżeniem także do ośrodków opisanych tensorem niehermitowskim, o ile znacząca absorpcja światła następuje na drodze dużo większej od λ . Wartości β_f i δ znajduje się na podstawie przybliżonego opisu ośrodka tensorem hermitowskim i wzorów (5.40)-(5.42). Złożone wyrażenia zawierające β_f i δ można zawsze przekształcić do prostszej postaci:

$$\sin \beta_f \cos \beta_f e^{i\delta} = \frac{B_{xy}^*}{(B_{xx} - B_{yy})^2 + 4B_{xy}B_{xy}^*}, \quad (7.12)$$

$$\sin \beta_f \cos \beta_f e^{-i\delta} = \frac{B_{xy}}{(B_{xx} - B_{yy})^2 + 4B_{xy}B_{xy}^*}. \quad (7.13)$$

c.d. Rachunek macierzowy Jonesa

Uwaga na różne układy współrzędnych!

Przykładowo, gdy badania dotyczą efektów elektrooptycznych

$$\Re[B_{ij}] = \delta_{ij}n_{0i}^{-2} + r_{ijk}E_k + g_{ijkl}E_kE_l + \dots, \quad (6.8)$$

postacie tensorów $[r_{ijk}]$, $[g_{ijkl}]$ i n_{0i} są stabilizowane w układzie osi krystalograficznych XYZ.

W rachunku Jonesa tradycyjnie stosuje się współrzędne xyz, w których zawsze $+z \parallel \mathbf{s}$.

Jeżeli w danym urządzeniu współrzędne XYZ i xyz nie pokrywają się, konieczna jest transformacja tensora \mathbf{B} znalezionej w układzie osi krystalograficznych XYZ do układu xyz

$$\begin{aligned} n_s \text{ (5.30), } n_f \text{ (5.31)} & \leftarrow \\ \beta_f \text{ (5.40) i (5.41)} & \leftarrow \\ \delta \text{ (5.42)} & \leftarrow \\ \sin \beta_f \cos \beta_f e^{\pm i\delta} \text{ (7.12) i (7.13)} & \leftarrow \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \leftarrow (6.8) \\ & \leftarrow \\ & \leftarrow \\ & \leftarrow \end{aligned} \quad [\mathbf{B}'] = [\mathbf{a}][\mathbf{B}][\mathbf{a}]^T, \quad (7.14)$$

Przykład 7.1: jeżeli kierunek światła w układzie XYZ wynosi $\mathbf{s} = [1, 0, 0]$ i azymut 0° nie jest narzucony w YZ, to do transformacji można wykorzystać np. macierz obrotu o kąt 90° wokół osi Y:

$$\begin{bmatrix} s'_x \\ s'_y \\ s'_z \end{bmatrix} = [\mathbf{a}] \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7.15)$$

c.d. Rachunek macierzowy Jonesa

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} T_f \cos^2 \beta_f + T_s \sin^2 \beta_f e^{-i\Gamma} & \sin \beta_f \cos \beta_f (T_f - T_s e^{-i\Gamma}) e^{-i\delta} \\ \sin \beta_f \cos \beta_f (T_f - T_s e^{-i\Gamma}) e^{i\delta} & T_f \sin^2 \beta_f + T_s \cos^2 \beta_f e^{-i\Gamma} \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

Tabela 7.1. Wybrane przypadki szczególne macierzy Jonesa (7.9).

<p>Ośrodek dichroiczny liniowy $\beta_f = \alpha_f$, $\delta = 0^\circ$ albo $\beta_f = -\alpha_f$, $\delta = 180^\circ$</p> $\begin{bmatrix} T_f \cos^2 \alpha_f + T_s \sin^2 \alpha_f e^{-i\Gamma} & \sin \alpha_f \cos \alpha_f (T_f - T_s e^{-i\Gamma}) \\ \sin \alpha_f \cos \alpha_f (T_f - T_s e^{-i\Gamma}) & T_f \sin^2 \alpha_f + T_s \cos^2 \alpha_f e^{-i\Gamma} \end{bmatrix} \quad (7.9a)$	
<p>Ośrodek absorbujący niedichroiczny, liniowy</p> $\mathbf{J} = T \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_f + \sin^2 \alpha_f e^{-i\Gamma} & \sin \alpha_f \cos \alpha_f (1 - e^{-i\Gamma}) \\ \sin \alpha_f \cos \alpha_f (1 - e^{-i\Gamma}) & \sin^2 \alpha_f + \cos^2 \alpha_f e^{-i\Gamma} \end{bmatrix} \quad (7.9b)$	
<p>Ośrodek absorbujący niedichroiczny, kołowy $T = T_f = T_s$, $\beta_f = 45^\circ$, $\delta = \pm 90^\circ$</p> $\mathbf{J} = \frac{T}{2} \begin{bmatrix} 1 + e^{-i\Gamma} & \mp i(1 - e^{-i\Gamma}) \\ \pm i(1 - e^{-i\Gamma}) & 1 + e^{-i\Gamma} \end{bmatrix} \quad (7.9c)$	
<p>prawoskrętny</p> $\frac{T}{2} \begin{bmatrix} 1 + e^{-i\Gamma} & -i(1 - e^{-i\Gamma}) \\ i(1 - e^{-i\Gamma}) & 1 + e^{-i\Gamma} \end{bmatrix}$	<p>lewoskrętny</p> $\frac{T}{2} \begin{bmatrix} 1 + e^{-i\Gamma} & i(1 - e^{-i\Gamma}) \\ -i(1 - e^{-i\Gamma}) & 1 + e^{-i\Gamma} \end{bmatrix}$

c.d. Rachunek macierzowy Jonesa

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} T_f \cos^2 \beta_f + T_s \sin^2 \beta_f e^{-i\Gamma} & \sin \beta_f \cos \beta_f (T_f - T_s e^{-i\Gamma}) e^{-i\delta} \\ \sin \beta_f \cos \beta_f (T_f - T_s e^{-i\Gamma}) e^{i\delta} & T_f \sin^2 \beta_f + T_s \cos^2 \beta_f e^{-i\Gamma} \end{bmatrix}, \quad (7.9)$$

Doskonała liniowa płytka ćwierćfalowa

$\Gamma = 90^\circ$, $T = T_f = T_s$ oraz $\beta_f = \alpha_f$ i $\delta = 0^\circ$ albo $\beta_f = -\alpha_f$ i $\delta = 180^\circ$

$$\mathbf{J} = T \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_f - i \sin^2 \alpha_f & \sin \alpha_f \cos \alpha_f (1 + i) \\ \sin \alpha_f \cos \alpha_f (1 + i) & \sin^2 \alpha_f - i \cos^2 \alpha_f \end{bmatrix} \quad (7.9d)$$

$\alpha_f = 0^\circ$
—
 $T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$\alpha_f = 90^\circ$
|
 $T \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\alpha_f = 45^\circ$
/
 $\frac{1}{2}T \begin{bmatrix} 1 - i & 1 + i \\ 1 + i & 1 - i \end{bmatrix}$

$\alpha_f = -45^\circ$
\
 $\frac{1}{2}T \begin{bmatrix} 1 - i & -1 - i \\ -1 - i & 1 - i \end{bmatrix}$

Doskonały polaryzator liniowy $T_f = 1$, $T_s = 0$, Γ - dowolne, $\beta_f = \alpha_f$, $\delta = 0^\circ$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_f & \sin \alpha_f \cos \alpha_f \\ \sin \alpha_f \cos \alpha_f & \sin^2 \alpha_f \end{bmatrix} \quad (7.9e)$$

$\alpha_f = 0^\circ$
—
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\alpha_f = 90^\circ$
|
 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\alpha_f = 45^\circ$
/
 $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\alpha_f = -45^\circ$
\
 $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

c.d. Rachunek macierzowy Jonesa

Przykład 7.2 – płytka ćwierćfalowa

Światło spolaryzowane pionowo pada na idealną płytkę ćwierćfalową ($\Gamma = 90^\circ$, $\delta = 0$, $T = 1$) o azymucie fali szybszej $\alpha_f = \pm 45^\circ$. Wektor Jonesa fali przechodzącej:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - i & \pm(1 + i) \\ \pm(1 + i) & 1 - i \end{bmatrix} |\mathcal{E}_0| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{|\mathcal{E}_0|}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-i\pi/4} \\ \pm e^{i\pi/4} \end{bmatrix} = \frac{|\mathcal{E}_0|}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm e^{i\pi/2} \end{bmatrix}. \quad (7.16)$$

Można pominąć wyrażenie skalarne $e^{-i\pi/4}$ bez konsekwencji dla stanu polaryzacji

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{bmatrix} = \frac{|\mathcal{E}_0|}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm e^{i\pi/2} \end{bmatrix}. \quad (7.17)$$

Składowe x i y wektora (7.17) mają równe moduły i są przesunięte w fazie o $\delta = \pm 90^\circ$, co oznacza polaryzację kołową prawoskrętną dla $\delta = +90^\circ$ albo lewoskrętną dla $\delta = -90^\circ$.

Płytkę ćwierćfalową wykorzystuje się także do zamiany polaryzacji kołowej na liniową.

c.d. Rachunek macierzowy Jonesa

Przykład 7.3 – płytka półfalowa

Płytke półfalową wykorzystuje się do zamiany polaryzacji kołowej prawoskrętnej na lewoskrętną i odwrotnie. Rozważmy światło spolaryzowane kołowo prawoskrętnie przechodzące przez płytkę półfalową o azymucie fali szybszej $\alpha_f = \pm 45^\circ$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{|\mathcal{E}_0|}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\pi/2} \end{bmatrix} = \frac{|\mathcal{E}_0|}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{i\pi/2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{|\mathcal{E}_0|}{\sqrt{2}} e^{i\pi/2} \begin{bmatrix} 1 \\ -e^{i\pi/2} \end{bmatrix}. \quad (7.18)$$

Wektor (7.18) opisuje polaryzację kołową lewoskrętną.

Płytka półfalowa służy także do obrotu płaszczyzny światła spolaryzowanego liniowo. Przykładowo, światło spolaryzowane pionowo i padające na płytkę półfalową o azymucie fali szybszej $\alpha_f = \pm 45^\circ$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} |\mathcal{E}_0| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |\mathcal{E}_0| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

staje się światłem spolaryzowanym poziomo.

7.3. Prawo Malusa jako wniosek z rachunku Jonesa

Wektor Jonesa dla światła za doskonałym polaryzatorem liniowym o azymucie θ

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = |\varepsilon_0| \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

Doskonały analizator liniowy o dowolnym azymucie α jest opisany macierzą Jonesa

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}. \quad (7.21)$$

Stan światła przechodzącego przez analizator dany jest wektorem Jonesa

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{J} \boldsymbol{\varepsilon}_0 = |\varepsilon_0| \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = |\varepsilon_0| \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha \cos \theta + \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta \\ \sin \alpha \cos \alpha \cos \theta + \sin^2 \alpha \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

Stąd, natężenie światła określone jako $I = |\varepsilon_x|^2 + |\varepsilon_y|^2$

$$\begin{aligned} I &= |\varepsilon_0|^2 (|\cos^2 \alpha \cos \theta + \sin \alpha \cos \alpha \sin \theta|^2 + |\sin \alpha \cos \alpha \cos \theta + \sin^2 \alpha \sin \theta|^2) = \\ &= |\varepsilon_0|^2 (\cos^2 \alpha |\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta|^2 + \sin^2 \alpha |\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta|^2) = \\ &= |\varepsilon_0|^2 |\cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta|^2, \end{aligned} \quad (7.23)$$

które można przekształcić do postaci prawa Malusa

$$\boxed{I = I_0 \cos^2(\alpha - \theta)}, \quad (7.24)$$

gdzie $I_0 = |\varepsilon_0|^2$ jest natężeniem światła padającego.

Literatura do tematu 7

- [6] F. Ratajczyk, „*Dwójłomność i polaryzacja optyczna*”, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.